

Representações Modulares de Grupos Finitos

Ricardo Felipe Rosada Canesin

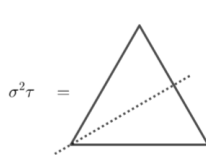
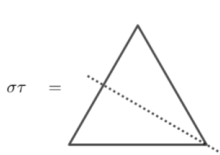
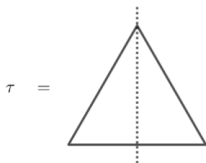
Orientadores: Lucia Satie Ikemoto Murakami
Vitor de Oliveira Ferreira

16 de dezembro de 2021

Representações de grupos

Uma **representação** é uma ação de um grupo por meio de operadores lineares:

$$\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$



Módulos e a álgebra de grupo

Cada elemento do grupo age no espaço vetorial:

$$g \cdot v = \rho(g)(v)$$

Linearidade: $g \cdot (v + \lambda w) = g \cdot v + \lambda(g \cdot w)$.

Podemos linearizar a primeira coordenada também!

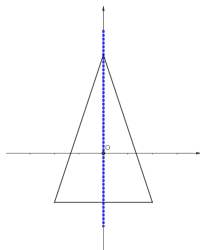
$\mathbb{C}G$ = espaço vetorial de base G .

Observação

Representações são módulos sobre a **álgebra de grupo** $\mathbb{C}G$.

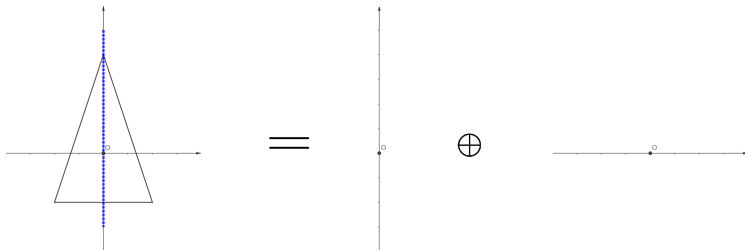
Decompondo representações

Podemos pensar em submódulos!



Decompondo representações

Podemos pensar em submódulos!



Um módulo é **simple** se não possui submódulos não triviais.

Resultados importantes

Teorema (Maschke)

Toda representação é uma soma direta de representações simples.

Se encontrarmos as simples, encontramos todas as representações!

As representações simples estão dentro da álgebra de grupo:

$$\mathbb{C}G \cong M_{n_1}(\mathbb{C}) \times M_{n_2}(\mathbb{C}) \times \cdots \times M_{n_r}(\mathbb{C})$$

Por exemplo:

$$\mathbb{C}D_3 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times M_2(\mathbb{C})$$

Representações sobre outros corpos

Por que só usamos os números complexos até agora?

Ainda podemos definir representações trocando $\mathbb{C}$ por um corpo k qualquer:

$$\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(k)$$

Por exemplo, se k tem característica 2, vale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \mathrm{Id}$$

Temos uma representação de C_2 que **indecomponível** mas não é simples!

Teorema (Maschke - versão completa)

$$kG \text{ é semissimples} \iff \text{char}(k) = 0 \text{ ou } \text{char}(k) \nmid |G|$$

As **representações modulares** são as representações sobre um corpo k de característica $p > 0$ dividindo a ordem de G .

Elas são mais complicadas!

Simples vs. Indecomponíveis

Em qualquer caso, toda representação é soma de indecomponíveis.

Apenas fora do caso modular, “simples” e “indecomponível” são os mesmos conceitos.

Sempre existe um número finito de módulos simples e eles estão todos dentro de kG .

Teorema (D. G. Higman)

Existe um número finito de kG -módulos indecomponíveis se, e somente se, os p -subgrupos de Sylow de G são cíclicos.

Se $p = 2$ e $G = C_2 \times C_2$, já temos infinitos indecomponíveis!

Como estudar os indecomponíveis?

Ainda temos uma decomposição especial:

$$kG \cong B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_r$$

Cada álgebra acima é um **bloco** de kG .

Cada kG -módulo indecomponível é também um B -módulo indecomponível para exatamente um bloco B de kG .

Vamos estudar cada bloco separadamente!

Grupos de defeito

Todo bloco B de kG vem munido de um invariante: o **grupo de defeito**.

Um grupo de defeito D de B “mede” a complexidade do bloco.

Ele se comporta como um p -subgrupo de Sylow de $G!$

Teorema

$$B \text{ é semissimples} \iff D \text{ é trivial}$$

Teorema

Existe um número finito de B -módulos indecomponíveis se, e somente se, D é cíclico.

Conseguimos dizer muita coisa sobre as representações de um bloco com grupo de defeito cíclico!

Teorema

Todo bloco de kG com grupo de defeito não trivial e cíclico é uma **álgebra de Brauer**.

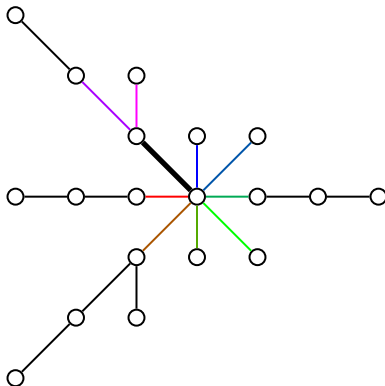
Isso quer dizer que existe uma **árvore de Brauer** associada.

Cada aresta da árvore corresponde a um módulo simples do bloco.

A disposição das arestas determina a estrutura dos indecomponíveis **projetivos**.

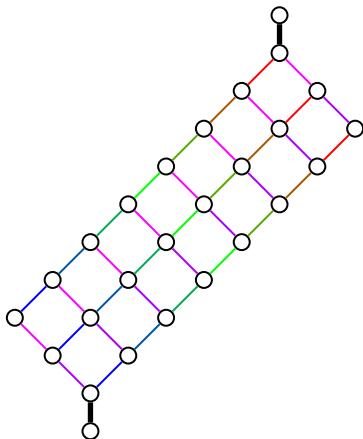
Exemplos

O grupo simples esporádico de Thompson possui um bloco cíclico em característica 19 com a seguinte árvore:



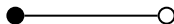
Exemplos

O indecomponível projetivo associado à aresta em **negrito** possui o seguinte **reticulado de submódulos**:

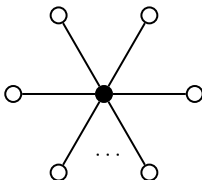


Exemplos

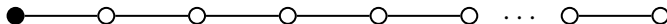
Se $G = C_n$:



Se D é cíclico e normal em G :



Se $G = \text{SL}_2(p)$:



- **Alperin, Jonathan L.** Local representation theory. Modular representations as an introduction to the local representation theory of finite groups. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1986.
- **Craven, David A.** Representation theory of finite groups: a guidebook. *Springer, Cham*, 2019.
- **Webb, Peter.** A course in finite group representation theory. *Cambridge University Press, Cambridge*, 2016.

Obrigado pela atenção!